

MICROECONOMIA (S1), 26 marzo 2026

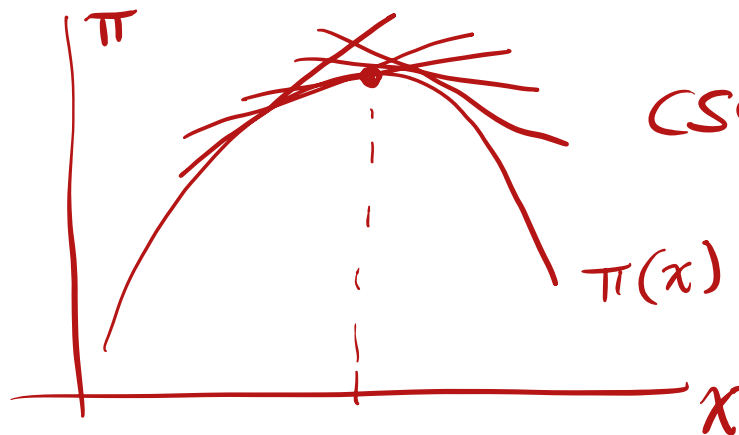
maximización de beneficios

Problema de la firma

Planteamos el **problema de maximización de beneficios** de la firma como

$$\max_{\vec{x}} \quad p \circledast f(\vec{x}) - C(\vec{x}), \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \vec{x}^* \text{ DEMANDA} \\ \rightarrow y^* = f(\vec{x}^*) \text{ OFERTA} \end{array} \right\}$$

donde $\vec{x}$ es el vector de insumos usado para producir, p es el precio del bien final, $f(\vec{x})$ es la función de producción y $C(\vec{x})$ es el costo de producir con $\vec{x}$.



$$CSO : \frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} < 0$$

Ejercicio 2.5

Considere el caso de un productor que utiliza sólo un insumo, x , para producir un único producto, y , de acuerdo con la siguiente tecnología de producción:

$$f(x) = x^\alpha, \quad \text{con } \alpha \in (0, 1).$$

INSUMO : x

BIEN FINAL : $y = f(x) = x^\alpha$

Ejercicio 2.5 (a)

- a. Determine cómo son los rendimientos a escala y marginales de esta función de producción.

RENDIMIENTOS A ESCALA

$$f(tx) \text{ vs. } tf(x)$$

$$= (tx)^\alpha$$

$$= t^\alpha \underbrace{x^\alpha}$$

$$t^\alpha < t$$

si $\alpha \in (0,1)$

$$= t^\alpha f(x) < tf(x) \quad y \quad t > 1$$

DRS

Rendimientos marginales

$$f(x) = x^\alpha$$

$$Pmg_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = \underline{\alpha x^{\alpha-1}} > 0$$

$$\frac{\partial Pmg_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x) = \frac{\alpha}{>0} \frac{(\alpha-1)}{<0} \frac{x^{\alpha-2}}{>0} < 0$$

Rend. marg. decrecientes

1:59 p. m. Jue 26 mar

felipetappata.github.io

91%

Ejercicio 2.5 (b)

b. Formule el problema de maximización de beneficios.

$$\max_x \quad \overbrace{p \cdot x^\alpha}^{\text{INGRESO}} - \overbrace{wx}^{\text{COSTO}}$$

Ejercicio 2.5 (c)

- c. Obtenga las funciones de demanda del insumo y de oferta del producto

CONCAVA + LINEAL

$$\max_x p \cdot x^\alpha - wx$$

$$\textcircled{f'' < 0} \Rightarrow \pi'' < 0$$

CPO : $\frac{\partial \pi}{\partial x} = 0$

$$\underline{p\alpha x^{\alpha-1}} - \underline{w} = 0$$

$$p\alpha x^{\alpha-1} = w$$

$$x^{\alpha-1} = \frac{w}{\alpha p}$$

$$\left(x^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\cancel{x^{\alpha-1}}^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

$$x = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\boxed{x^* = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

DEMANDA DE INSUMO x

$$y^* = f(x^*) = \left[\left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\alpha}$$

$$\boxed{y^* = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

OFERTA BIEN FINAL

Ejercicio 2.5 (d)

- d. Verifique que la condición de segundo orden se cumple. ¿Qué rol juega en esto lo que encontró en (a)?

$$CSO : \pi''(x) < 0$$

$$\pi'(x) = p\alpha x^{\alpha-1} - w$$

$$\pi''(x) = \underbrace{p}_{>0} \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{(\alpha-1)}_{<0} \underbrace{x^{\alpha-2}}_{>0} < 0$$

CSO ✓



Ejercicio 2.6

Considere la siguiente función de producción

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad \text{con } \alpha \in (0, 1).$$

Cobb-Douglas



Ejercicio 2.6 (a)

- a. ¿Son los retornos a escala de f crecientes, constantes o decrecientes? ¿Son los retornos marginales decrecientes? Verifique ambos resultados de manera algebraica.

Rendimientos a escala

$$f(\underbrace{x_1, x_2}_{\vec{x}}) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$f(t\vec{x}) \text{ vs. } t f(\vec{x})$$

$$= (tx_1)^{\alpha} (tx_2)^{1-\alpha}$$

$$\alpha + 1 - \alpha$$

$$= 1$$

$$= t^{\alpha} x_1^{\alpha} t^{1-\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$= t^{\alpha + 1 - \alpha} x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$= t f(x_1, x_2) = t f(\vec{x})$$

CRS

COBB - DOUGLAS

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$$

$$f(tx) = (tx_1)^{\alpha_1} (tx_2)^{\alpha_2} \dots (tx_N)^{\alpha_N}$$

$$= t^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}$$

$$= t^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N} f(\vec{x}) \text{ vs. } t f(\vec{x})$$

$$\text{si } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N > 1 \quad \text{IRS.}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1 \quad \text{CRS}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N < 1 \quad \text{DRS}$$

Rendimientos marginales

$$f(\cdot) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$$

$$Pmg_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial Pmg_{x_1}}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha} < 0$$

$\underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{(\alpha-1)}_{<0} \underbrace{x_1^{\alpha-2}}_{>0} \underbrace{x_2^{1-\alpha}}_{>0}$

x_1 tiene R.M. decrecientes.

$$Pmg_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^\alpha (1-\alpha) x_2^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial Pmg_{x_2}}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = x_1^\alpha (1-\alpha)(-\alpha) x_2^{-\alpha-1} < 0$$

$\underbrace{x_1^\alpha}_{>0} \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} \underbrace{(-\alpha)}_{<0} \underbrace{x_2^{-\alpha-1}}_{>0}$

x_2 tiene R.M. decrecientes.



Ejercicio 2.6 (b)

- b. Formule el problema de maximización de beneficios de la firma cuando el precio por unidad de output es p y los precios de los factores son w_1 y w_2 (ambos factores variables).

$$\max_{x_1, x_2} \quad \overbrace{p \cdot x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}}^{\text{INGRESOS}} - \overbrace{w_1 x_1 - w_2 x_2}^{\text{COSTOS}}$$

Ejercicio 2.6 (c)

- c. Derive las condiciones de primer orden del problema de maximización de beneficios planteado en el inciso anterior.

$$\max_{x_1, x_2} \underbrace{p \cdot x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} - w_1 x_1 - w_2 x_2}_{\pi(x_1, x_2)}$$

$$\text{CPOs : } (x_1) : \underbrace{p \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - w_1}_{\frac{\partial \pi}{\partial x_1}} = 0$$

$$(x_2) : \underbrace{p x_1^\alpha (1-\alpha) x_2^{-\alpha} - w_2}_{\frac{\partial \pi}{\partial x_2}} = 0$$

Ejercicio 2.6 (d)

- d. Asuma que (x_1^*, x_2^*) es el vector que resuelve las condiciones de primer orden del problema formulado en (b). Multiplique la condición del factor 1 por x_1^* y la condición para el factor 2 por x_2^* . Sume ambas condiciones. ¿Qué le dice esta condición respecto de la maximización de beneficios en (x_1^*, x_2^*) ?

$$(x_1) : \underbrace{p \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}_{\frac{\partial \pi}{\partial x_1}} - w_1 = 0$$

$p \alpha x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$

$$\underline{x_1 p \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - x_1 w_1 = 0} \quad (1)$$

$$(x_2) : \underbrace{p x_1^{\alpha} (1-\alpha) x_2^{-\alpha}}_{\frac{\partial \pi}{\partial x_2}} - w_2 = 0$$

$p x_1^{\alpha} (1-\alpha) x_2^{1-\alpha}$

$$\underline{x_2 p x_1^{\alpha} (1-\alpha) x_2^{-\alpha} - x_2 w_2 = 0} \quad (2)$$

(1) + (2)

$$\underbrace{p\alpha x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}}_{(1)} \underbrace{(-x_1 w_1)}_{(2)} + \underbrace{p(1-\alpha) x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}}_{(1)} \underbrace{(-x_2 w_2)}_{(2)} = 0$$

$$p x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} (\alpha + 1 - \alpha) - x_1 w_1 - x_2 w_2 = 0$$

$$\boxed{\underbrace{p x_1^*{}^\alpha x_2^*{}^{1-\alpha}}_{\pi(x_1^*, x_2^*)} - \underbrace{w_1 x_1^*}_{\pi(x_1^*, x_2^*)} - \underbrace{w_2 x_2^*}_{\pi(x_1^*, x_2^*)} = 0}$$

En el óptimo, $\pi^* = 0$.

≤ 0

$$\pi(x) =$$

$$p f(x) - w x$$

$$\pi(tx) = p f(tx) - w tx$$

$$= p t f(x) - w t x$$

$$= t [p f(x) - w x]$$

$$= t \pi(x)$$

APARTE

EJERCICIO 2.6 (e)

- e. La forma de las condiciones de primer orden de d) le permite expresar la (asumida) elección óptima de x_1 y x_2 como una función del nivel de producto. Incorporando esto en la expresión para los beneficios se puede obtener una expresión un tanto engorrosa para los beneficios en función de p, w_1, w_2, α e y . Sean $\alpha = 1/2$ y $w_1 = w_2 = 1$. ¿Para qué precios del producto p (si es que existe alguno) hay una solución al problema de maximización de beneficios de la firma? En caso de encontrar tal precio, ¿cuáles son los niveles de producto que resuelven el problema de maximización de beneficios?

$$x_1(y) \quad x_2(y)$$

23 / 23

$$\text{CPOs : } (x_1) : \underbrace{p \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}_{\frac{\partial \pi}{\partial x_1}} - w_1 = 0$$

$$(x_2) : \underbrace{p x_1^{\alpha} (1-\alpha) x_2^{-\alpha}}_{\frac{\partial \pi}{\partial x_2}} - w_2 = 0$$

$$(x_1) \rightarrow p\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} = w_1$$

$$(x_2) \rightarrow p(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} = w_2$$

$$\frac{(x_1)}{(x_2)} : \frac{\alpha x_1^{(\alpha-1)} x_2^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} x_1^{-1} x_2^1 = \frac{w_1}{w_2}$$

$$x_2 = \frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} x_1$$

$$y = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

$$y = x_1^{\alpha} \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} x_1 \right)^{1-\alpha}$$

$$y = x_1^{\alpha} \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} x_1^{1-\alpha}$$

$$y = x_1 \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \rightarrow \frac{w_1^{1-\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}}{w_2^{1-\alpha} \alpha^{1-\alpha}}$$

$$x_1 = y \left(\frac{w_2}{w_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha}$$

$$w_2^{1-\alpha} \alpha^{1-\alpha}$$

$$w_1^{1-\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{w_2}{w_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha}$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{w_2}{w_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} y$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha-1} y \quad \left(\frac{a}{b} \right) = \left(\frac{b}{a} \right)^{-1}$$

$$x_2 = \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha} y$$

INGRESO

$$\pi = \underbrace{p \cdot y}_{f(x_1, x_2)} - \underbrace{w_1 \left(\frac{w_2}{w_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} y}_{x_1} - \underbrace{w_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha} y}_{x_2}$$

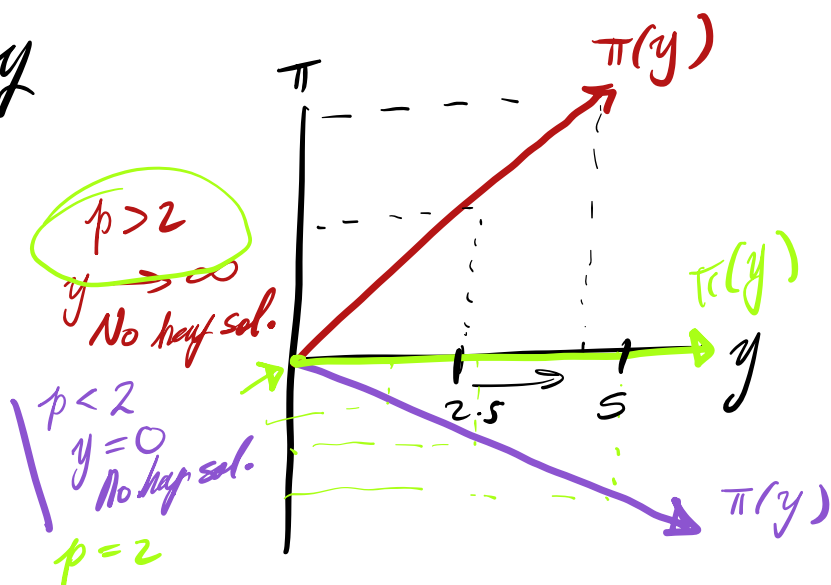
$$\alpha = \frac{1}{2} \quad w_1 = 1 \quad w_2 = 1$$

$$\pi = py - 1 \times \left(\frac{1}{1} \times \frac{1/2}{1/2} \right)^{1/2} y - 1 \times \left(\frac{1}{1} \times \frac{1/2}{1/2} \right)^{1/2} y$$

$$= py - y - y$$

$$= py - 2y$$

$$\pi = y[p - 2]$$



$p = 2$ para que $\pi(y) = 0$

Cualquier $y \in [0, \infty)$ resuelve
el problema de max. beneficios.
